ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Ανάπτυξη πίνακα: $\det A = \sum_{t=1}^{n} (-1)^{t+1} a_{t,1} \det A(t,1)$

Ιδιότητες:

(i) Η ορίζουσα ενός άνω ή κάτω τριγωνικού πίνακα ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου.

(ii) Αν ο B προκύπτει από τον A με πολ/μο κάποιας γραμμής του με α, τότε
$\det AB = \alpha \det A = \det M_i(\alpha) \det A$

(iii) Αν ο B προκύπτει από τον A με εναλλαγή 2 γραμμών, τότε $\det B = \det A = \det E_{i,j} \det A$

(iv) Αν ο B προκύπτει από τον A με πρόσθεση της i-γραμμής του πολ/μένη με
α στην j-γραμμή, τότε $\det B = \det A = 1 \cdot \det A_{ij}(\alpha) \det A$

<u>Πόρισμα:</u> Αν ο A έχει 2 γραμμές ίσες, τότε η ορίζουσά του είναι 0.

<u>Απόδειξη:</u> $A = \begin{pmatrix} \text{—} \\ \text{—} \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} i\text{-γραμμή} \\ j\text{-γραμμή} \end{matrix}$ $\quad a_{i,t} = a_{j,t}$

Με την ιδιότητα (iii): $B = A$, $\det B = -\det A$. $\det A = -\det A \Rightarrow 2\det A = 0 \Rightarrow \det A = 0$

<u>Πόρισμα:</u> Αν ο A έχει μία γραμμή μηδενική, τότε $\det A = 0$. Εφαρμογή της ιδιότητας (ii)

<u>Πρόταση:</u> Έστω ότι οι πίνακες A, B, C έχουν όλες τις γραμμές τους ίσες αντίστοιχα
(τη 1η με την 1, 2η με 2) εκτός από την i, η οποία έχει την εξής ιδιότητα:
«Η i-γραμμή προέρχεται από το άθροισμα της i του A και της i του B. Τότε
$$\det C = \det A + \det B$$

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 11 & 12 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 14 & 16 & 18 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $\det C = \det A + \det B$

<u>Απόδειξη με επαγωγή στο n</u>
$n = 1$ $A = (a)$, $B = (b)$, $C = (a+b)$
$n = 2$ $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} \end{pmatrix}$

$\det C = a_{1,1} \det C_{1,1} - (a_{2,1} + b_{2,1}) \det C_{2,1}$
$C_{1,1} = a_{2,2} + b_{2,2}$
$C_{2,2} = a_{1,2}$

$\det C = a_{1,1}(a_{2,2} + b_{2,2}) - (a_{2,1} + b_{2,1}) a_{1,2}$
$\Rightarrow = a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,1} b_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1} + a_{1,2} b_{2,1}$
$= a_{1,1} a_{2,2} - a_{2,1} a_{1,2} + a_{1,1} b_{2,2} - b_{2,1} a_{1,2}$
$= \det A + \det B$ <u>ισχύει</u>

Υποθέτουμε ότι ισχύει για κ, θα τον αποδείξουμε για κ+1, δηλαδή πίνακες $(\kappa+1)\times(\kappa+1)$

$$\det C = \sum_{t=1}^{\kappa+1} (-1)^{t+1} C_{t,i} \det(C_{t,1}) = \sum_{t=1, t\neq i}^{\kappa+1} (-1)^{t+1} C_{t,1} \det(C_{t,1}) + (-1)^{i+1} C_{i,1} \det(C_{i,1})$$

$C_{t,1} = a_{t,1} = b_{t,1} \quad t \neq i$

Ο $C_{t,1}$ σχηματίζεται από τη διαγραφή της t-γραμμής και 1-στήλης του C, $t\neq i$. Άρα ο $C_{t,1}$ στην αντίστοιχη γραμμή του, έχει το άθροισμα της αντίστοιχης i-γραμμής του $A_{t,1}$, και του $B_{t,1}$. Ο $C_{t,1}$ είναι κxκ κ' σύμφωνα με την υπόθεση της επαγωγής ⓔ έχουμε $\det(C_{t,1}) = \det A_{t,1} + \det B_{t,1}$

$C_{i,1} = a_{i,1} + b_{i,1}$

$C_{i,1} = A_{i,1} = B_{i,1}$, διότι έχουμε διαγράψει την i-γραμμή, η οποία είναι διαφορετική

$$\sum_{t=1, t\neq i}^{\kappa+1} (-1)^{t+1} a_{t,1} (\det A_{t,1} + \det B_{t,1}) + (-1)^{i+1} (a_{i,1} + b_{i,1}) \det + \underset{= B_{i,1}}{A_{i,1}} =$$

$$= \sum_{t=1, t\neq i}^{\kappa+1} (-1)^{t+1} a_{t,1} \det A_{t,1} + \sum_{t=1}^{\kappa+1} (-1)^{t+1} b_{t,1} \det B_{t,1}$$

Πρόταση: Αν ο B προέρχεται από τον A με πρόσθεση της j-γραμμής πολλαπλάσιας με α στην i-γραμμή του, τότε $\det B = \det A$

Απόδειξη: $B = A_{i,j}(a) A$

$\det A_{i,j}(a) = 1$, διότι είναι άνω ή κάτω τριγωνικός.

• Ο B είναι στη θέση του C της προηγούμενης πρότασης με το B της προηγούμενης πρότασης να είναι ο πίνακας A', ο οποίος σχηματίζεται από τον A, όπου έχουμε αντικαταστήσει την i-γραμμή με την j πολλαπλάσια με α.

$\det B = \det + \det A' = \det A + 0 = \det A$

Ο A' έχει την i-γραμμή να είναι η j του A πολλαπλάσια με α.

$\det A' = a \det A'' = a \cdot 0$

A'' έχει την i κ' την j γραμμή ίδιες.

Δείξαμε ότι $\det B = \det A = 1 \cdot \det A = \det A_{i,j}(a) \det A = \det(A_{i,j}(a))$

π.χ.

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -6$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 2\cdot 0 = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} = 3\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} = -3\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} = -3\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{pmatrix}$$

$$= -3\cdot 5\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = -15\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix} = -15(-11) =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 \end{pmatrix}$$

$$(y-x)(z-x)\det\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 1 & y+x\\ 0 & 1 & z+x\end{pmatrix} = (y-x)(z-x)\det\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 1 & y+x\\ 0 & 0 & z-y\end{pmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$$

<u>Θεώρημα:</u> Η συνάρτηση ορίζουσα είναι πολλαπλασιαστική: $\det(AB) = \det A \det B$

<u>Απόδειξη:</u>

$A \sim$ γραμμοπράξεις

$\underbrace{R}_{\text{ανηγμένος κλιμακωτός}} = \overbrace{E_k \dots E_2 E_1}^{\text{θεώρημα}} A$ → στοιχειώδεις πίνακες

$R = \begin{cases} \to \text{ταυτοτικός } I \\ \to \text{θα έχει τουλάχιστον την τελευταία του γραμμή } 0. \end{cases}$

$\det R = 0.$

$R = E_k \dots E_1 A \Leftrightarrow A = \underbrace{E_k' \dots E_1'}_{\text{στοιχειώδεις}} R$

$\det EC = \det E \det C$ (E στοιχειώδης)

$\Rightarrow$ κ' επαγωγή στο k πλήθος πινάκων. Έχουμε $\det A = \det E_k' \det E_{k-1}' \dots \det E_1' \det R$

Αν A αντιστρέψιμος ($\Leftrightarrow R = I$), τότε $\det A = \det E_k' \dots \det E_1'$

Αν A όχι αντιστρέψιμος ($\Leftrightarrow R \neq I$ κ' $\det R = 0$), τότε $\det A = 0$. Θέλουμε $\det(AB)$

$AB = E_k' \dots E_1' RB$

$\det(AB) = \det E_k' \dots \det E_1' \det(RB)$

$R = I \Rightarrow RB = B$. Άρα $\det(AB) = \det E_k' \dots \det E_1' \det B = \det A \det B$

Έστω $R \neq I$, A όχι αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow \det R = 0$.

$\det(AB) = \det E_k' \dots \det E_1' \det(RB)$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \\ 0 & 1 & \dots\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & * & \\ 0 & 0 \dots & 0\end{pmatrix} \quad \det(RB) = 0 = 0 \cdot \det B = \det R \det B$$

(Π) $\det(AB) = \det E'_k \ldots \det E'_1 \det R \det B = 0 \cdot \det B = \det A \det B$

<u>Θεώρημα:</u> $\det A^t = \det A$

<u>Απόδειξη:</u> Οι στοιχειώδεις πίνακες είναι άνω ή κάτω τριγωνικοί. Άρα κι οι ανάστροφοι είναι επίσης άνω ή κάτω τριγωνικοί.

$(A)^t = (E'_k \ldots E_1 R) = \det R^t \det (E'_1)^t = \det R \det E'_1 \ldots \det E'_k = \det E'_k \det E'_{k-1} \ldots \det E'_1 \det R =$
$= \det A$

<u>Θεώρημα:</u> $\det A = \sum_{t=1}^{n} (-1)^{t+1} a_{t,1} \det A_{t,1}$

$\det A^t = \sum_{t=1}^{n} (-1)^{t+1} a_{1,t} \det A_{1,t}$
$\parallel$
$\det A$

$\det A = \sum_{t=1}^{n} (-1)^{t+i} a_{i,t} \det i,t \neq$ ως προς j-στήλη $\sum_{t=1}^{n} (-1)^{j+t} a_{t,j} \det j,t$

ως προς i-στήλη